自由双対棒構成の非輪状性 : Free Cobar Costruction (幾何学における大域的解析学)

青本, 和彦

数理解析研究所講究録
321巻 1978年 103-120

自由双対棒構成の非輪状性
(Free Cobar Construction)

東大 教養 青本和彦

1. 添加写像 $\varepsilon: \Lambda \longrightarrow \mathbb{Z}$ を持つ結合環 Λ の生成系と関係式達が与えられているとする。すなわち 射

$$(0) \longrightarrow L \xrightarrow{\iota_0} \Lambda^f \xrightarrow{\kappa_0} \Lambda \longrightarrow (0)$$

が与えられているとする。ここに Λ^f は自由結合環 L は Λの関係式達を決定する両側イデアル(Λ^fの)である。

[問題] Λ^fの両側モジュールの系列 $\{A_j\}$ $j \geqq 0$, $A_0 = \Lambda^f$ で $A = \sum_{j=0}^{\infty} A_j$ は自由結合環, 射 $A_j \xrightarrow{\delta_j} A_{j-1}$ $(j \geqq 1)$, によって A は複体, 且つ $\delta_1 A_1 = L$ となるものが存在するか? 存在するならば それは いかにして構成されるか?

この問題において環Λの代わりに群Gをとり且つ A_jをすべて自由群ととった場合にはこれは古くより知られている(K. Reidemeister, R. Pfeiffer

P.A. Smith [1], D.M. Kan [2] など)。

これを環にして考えた場合 近年イリノイ大学の K.T. Chen 氏[3]によって研究されている微分型式の反復積分 又その双対概念である J. Adams の棒構成 と密接な関係にあることを示すのが本稿の目的である(K. Aomoto [4])

左Λ-加群複体(X, ∂)に対し

Assump. I, i) 左 Λ^f-加群 の2系列 (X^f, ∂^f) と $(L \otimes_{\Lambda^f} X^f, 1 \otimes_{\Lambda^f} \partial^f)$ と添加写像 ε^f

$$(0) \longrightarrow (\Lambda^f)^+ \longrightarrow \Lambda^f \xrightarrow{\varepsilon^f} \mathbb{Z} \to (0)$$

が次の可環図式を持つとする。

$$\begin{tikzcd}
 & (0) & (0) & (0) & (0) & (0) & & \\
{} \arrow[r] & X_p \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[u] & X_{p-1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] \arrow[u] & X_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[u] & \Lambda \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{Z} \arrow[r] & (0) \\
{} \arrow[r] & X_p^f \arrow[r, "\partial_p^f"] \arrow[u, "\kappa_p"] & X_{p-1}^f \arrow[r] \arrow[u, "\kappa_{p-1}"] & \cdots \arrow[r] & X_1^f \arrow[r, "\partial_1^f"] \arrow[u, "\kappa_1"] & \Lambda^f \arrow[r] \arrow[u, "\kappa_0"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & (0) \\
{} \arrow[r] & L \otimes_{\Lambda^f} X_p^f \arrow[r, "1\otimes\partial_p^f"] \arrow[u, "\iota_p"] & L \otimes_{\Lambda^f} X_{p-1}^f \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & L \otimes X_1^f \arrow[r, "1\otimes\partial_1^f"] \arrow[u, "\iota_1"] & L \arrow[u, "\iota_0"] & & \\
 & (0) \arrow[u] & (0) \arrow[u] & & (0) \arrow[u] & (0) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

ここに κ_p は全射, X_p と X_p^f は各々 $\Lambda \otimes S_p$ と $\Lambda^f \otimes S_p$

に同型, S_p は自由アーベル群, で $L = X_2^f \otimes \Lambda^f$.

ii) ∂_p^f は単射, $p \geq 1$.

$\overset{+}{X}{}^f = \left(\sum_{p=2}^{\infty} X_p^f\right) \oplus \Lambda^+$ とおき $T(\overset{+}{X}{}^f)$ を $\overset{+}{X}{}^f$ のテンソル環とし これを A とおく. すると A の任意の元は $u_1[u_2|\cdots|u_{m-1}]u_m$, $u_j \in X_{p_j}^f$ $(p_j \geq 2)$, $j \leq m-1$ $u_m \in \Lambda^f$ の線型結合で得られる. この形の元の次数を $\sum_{j=1}^{m-1}(p_j - 1)$ とおくことにより A は階級環: $A = \sum_{s=0}^{\infty} A_s$ となる. 明らかに $A_0 = \Lambda^f$, $A_1 = L$ である。

$\{u_\gamma^p, \gamma \in \Gamma_p\}$ を S_{p+1} の順序づけられた基底とし $\{u_\gamma^0, \gamma \in \Gamma_0\}$ を $(\Lambda^f)^+$ の順序づけられた生成系とする. このとき A は実は u_γ^p, $\gamma \in \Gamma_p$, $p \geq 0$ で生成された自由結合環である.

[定義 1] u_α^p, $\alpha \in \Gamma_p$ が u_β^q, $\beta \in \Gamma_q$ より "大きい" とは $p > q$ 又は $p = q$, $\alpha > \beta$ のときである。さらに $u_{\alpha_1}^{p_1} \cdots u_{\alpha_m}^{p_m}$ が $u_{\beta_1}^{q_1} \cdots u_{\beta_n}^{q_n}$ より "大きい" とは $p_m = q_n$, $\alpha_m = \beta_n$, $\ldots$, $p_{m-k+1} = q_{n-k+1}$, $\alpha_{m-k+1} = \beta_{n-k+1}$

且つ $p_{m-k} > q_{n-k}$ 又は $p_m = q_n,\ \alpha_m = \beta_n,\ \cdots,\ p_{m-k+1} = q_{n-k+1},\ \alpha_{m-k+1} = \beta_{n-k+1},\ p_{m-k} = q_{n-k}$ 且つ $\alpha_{m-k} > \beta_{n-k}$ となるときである。$A(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ を $u^{p_1}_{\gamma_1} \cdots u^{p_m}_{\gamma_m}$, $\gamma_\nu \in \Gamma_{p_\nu}$, $p_1 \geqq 1$ で生成される A の Λ^f–左加群とする。又 $\mathfrak{A}(p_1, \cdots, p_m)$ を $\sum_{(q_1 \cdots q_n) < (p_1 \cdots p_m)} A(q_1 \cdots q_n)$ とおく。

このときさらに次の仮定をおく。

Assump II i) 境界作用素の系列 $\delta = \{\delta_s\}$, $\delta_s : A_s \to A_{s-1}$ が存在して i) $\delta_s u^s \equiv \partial^f_{s+1} u^s$ mod. $\mathfrak{A}(s-1)$, $u^p \in S_{p+1}$

ii) $\delta\ u_1[u_2 | \cdots | u_{m-1}]u_m =$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{\sum_{j=1}^{\nu-1} \deg u_j} \cdot u_1[u_2 | \cdots | u_{\nu-1} | \delta u_\nu | \cdots | u_{m-1}]u_m$$

iii) $\delta | A_1$ は ι_0 と一致する。

このふたつの仮定をみたす時 複体 (A, δ)

$$\to A_s \xrightarrow{\delta_s} A_{s-1} \xrightarrow{\delta_{s-1}} \cdots \xrightarrow{\delta_2} A_1 \xrightarrow{\iota_0} \Lambda^f \xrightarrow{\varepsilon_0} \Lambda \to (0)$$

のことを 自由双対棒構成 と呼ぶ。

[主定理] 左Λ-加群複体 (X, ∂) が Λの自由分解となるための必要十分条件は Aのホモロジーに対して

$$\begin{cases} H_p(A) = 0 & p \geqq 1 \\ H_0(A) \cong \Lambda \end{cases}$$

が成立することである。

この定理の下で冒頭の問題のひとつの解答が得られた。

次にいくつかの実例を与える。

2. 作用素つき Adams 双対棒構成

M を連結単体的複体，x_0をMの基点とする。N を x_0を含む極大"木"とする. M/N は x_0のみを頂点とするCW-複体になる. その複体を $C_*(M/N)$ とおく。Gを $(M/N, x_0)$ の辺道群とすればGは自然に(M, x_0)の基本群と同型である。(M, x_0) の簡約閉道全体は自由群の構造を持つ。これをFとおく. Lを簡約2-単体 $:\langle v_0 v_1 v_2\rangle \longrightarrow M/N$ から得られる基本関係

$$\delta_1 T\langle v_0 v_1 v_2\rangle = T\langle \widetilde{v_0 v_1}\rangle \cdot T\langle \widetilde{v_1 v_2}\rangle - T\langle \widetilde{v_0 v_2}\rangle$$

によって生成される $\mathbb{Z}[F]$ の両側イデアルとする。ここで $T\langle\widetilde{v_0 v_1}\rangle, T\langle\widetilde{v_1 v_2}\rangle, T\langle\widetilde{v_0 v_2}\rangle$ はFの元を定める.

$X_p = \mathbb{Z}[G] \otimes C_p(M/N)$, $X = \sum_{p=0}^{\infty} X_p$ とおく。
又 $X^f = \mathbb{Z}[F] \otimes C_*(M/N)$ とおき ∂^f を

$$\partial_n^f T\langle v_0 v_1 \cdots v_n\rangle = T\langle \widetilde{v_0 v_1}\rangle \cdot T\langle v_1 v_2 \cdots v_n\rangle +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot T\langle v_0 v_1 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_n\rangle$$

$T\langle \widetilde{v_0 v_1}\rangle \in F$. 又 δ_{n-1} を

$$\partial_n' T\langle v_0 v_1 \cdots v_n\rangle = T\langle \widetilde{v_0 v_1}\rangle \cdot T\langle v_1 v_2 \cdots v_n\rangle +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \cdot T\langle v_0 v_1 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_n\rangle +$$

$$+ (-1)^n \cdot T\langle v_0 v_1 \cdots v_{n-1}\rangle \cdot T\langle \widetilde{v_{n-1} v_n}\rangle +$$

$$- \sum_{i=2}^{n-2} (-1)^i \cdot T\langle v_0 v_1 \cdots v_i\rangle \cdot T\langle v_i \cdots v_n\rangle ,$$

$T\langle \widetilde{v_0 v_1}\rangle$, $T\langle \widetilde{v_{n-1} v_n}\rangle \in F$ によって定義すれば

我々の仮定 I, II を満たす。従て主定理により

[定理2]. M が $K(\pi, 1)$ 空間であるための必要十分条件は $H_p(A) \cong 0$, $p \geq 1$ で $H_0(A) \cong \mathbb{Z}[G]$ となることである。

3. $\mathfrak{g}$をZ上の Lie 環とする。$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ 又は$T(\mathfrak{g})$を各々 $\mathfrak{g}$ の展開環 又はテンソル環とする。このとき射

$$(0) \to L \xrightarrow{\iota_0} T(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\kappa_0} \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \to (0)$$

が存在し Lは $x \cdot y - y \cdot x - [x, y]$, $x, y \in \mathfrak{g}$ で生成される $T(\mathfrak{g})$ の 両側イデアルである. (X, ∂) を $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$の正規標準複体,

(X^f, ∂^f) を $T(\mathfrak{g})$ の それとすれば (X, ∂), (X^f, ∂^f) は Assump I i) の可環図式をみたす. ここで $X_p = \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^p \mathfrak{g}$, $X_p^f = T(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^p \mathfrak{g}$ である。そして $\langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle \in \wedge^n \mathfrak{g}$ に対して

$$\partial^f \langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i \langle x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \rangle +$$

$$+ \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{i+j} \langle [x_i x_j] x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_n \rangle$$

棒構成 (A, δ) に対しては

$$\delta \langle x_1 x_2 \cdots x_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i \langle x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n \rangle$$

$$+ \sum_{1 \leqq i < j \leqq n} (-1)^{i+j} \langle [x_i x_j] x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_n \rangle +$$

$$+\sum_{2\leq\nu\leq n-2}\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_\nu\\ i_{\nu+1}<\cdots<i_n}}(-1)^{\nu-1}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}\langle x_{i_1}\cdots x_{i_\nu}\rangle\langle x_{i_{\nu+1}}\cdots x_{i_n}\rangle+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\langle x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n\rangle x_i,\quad n\geqq 3$$

$$\delta\langle x_1x_2\rangle = x_1x_2-x_2x_1-[x_1x_2]\qquad n=2$$

とおく。すると Assump I, II をみたし

[定理 3] $H_p(A)\cong 0$, $p\geqq 1$

$H_0(A)\cong \mathfrak{E}(\mathfrak{g})\quad p=0$

4. しかし抽象的に生成元と基本関係式が与えられた群 G に対して冒頭の問題が具体的に構成出来るというものではない。これを特に Artin 群について説明したい。

$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l\}$ を半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の基本根基系とする。ここで l は rank. $\Delta=\Delta^+\cup\Delta^-$ を正根・負根の和集とする。$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}^+\oplus\mathfrak{m}^-$ (Cartan 分解)、Π の Weyl 群 W の各 α_j に対応する鏡映を σ_j とするとき

$$W = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_l \mid \sigma_j^2 = 1$$
$$\underbrace{\sigma_i\sigma_j\sigma_i\cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{\sigma_j\sigma_i\sigma_j\cdots}_{m_{ij}}$$

ここに $M = (m_{ij})$ は Coxeter 行列である。Π の Artin 群 $\hat{W}$ は

$$\hat{W} = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_l \mid \underbrace{\sigma_i\sigma_j\sigma_i\cdots}_{m_{ij}} = \underbrace{\sigma_j\sigma_i\sigma_j\cdots}_{m_{ij}}\}$$

によって定義される (Brieskorn–Saito [5]). 従て完全列

$$\{1\} \longrightarrow K \longrightarrow \hat{W} \xrightarrow{\lambda} W \longrightarrow \{1\}$$

がある。しかも $\hat{W}^+$ (正語のなす $\hat{W}$ の部分 monoid) $\cong W$.

Π の任意の部分図形 Π' に対して その根系 Δ', 正根・負根 Δ'^+, Δ'^-, 対応する簡約部分環 $\mathfrak{g}(\Delta')$ の Cartan 分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Delta') \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$$

とする. ここに $\mathfrak{n}^+$ は正根ベクトル $\subset \mathfrak{m}^+$, $\mathfrak{n}^-$ は負根ベクトル $\subset \mathfrak{m}^-$, Π' に対応する Weyl 群を

$W(\Pi')$ とおくとき　$\forall \sigma \in W$ に対して
$$\Phi_\sigma = (-\sigma\Delta^+) \cap \Delta^+$$ と記すと

$$W^*(\Pi') = \{\sigma \in W \mid \Phi_\sigma \subset \Delta(\mathfrak{n}^+)\}$$
（$\Delta(\mathfrak{n}^+)$ は $\mathfrak{n}^+$ に含まれる正根基集合）

よく知られているように

Lemma 1. $W(\Pi')\backslash W = W^*(\Pi')$

しかも　$\forall \sigma \in W^*(\Pi')$, $\tau \in W(\Pi')$ に対して
$$l(\tau\sigma) > l(\sigma)$$
（$l(\sigma)$ は σ の長さ）

今 Π の部分図形で rk が $(l-1)$ のものをすべて考える。それらを
$$\Pi_j = \{\alpha_1 \cdots \alpha_{j-1}\ \alpha_{j+1} \cdots \alpha_l\}$$
$$1 \leq j \leq l$$
と書き対応する Weyl 群 W_j, 根基系 Δ_j などと記すとき，$\hat{W}$ のひとつの自由分解が次のようにして得られる（Deligne [6]，中村(得) [7] など参照）：　Π の部分図形全体で生成される自由アーベル群を S とおく．そして $\dim\langle\Pi'\rangle = rk\,\Pi'$ とおき，$\hat{W}$ の棒溶解 $B(\hat{W}) = \mathbb{Z}[\hat{W}] \otimes S$

は

$$\partial\langle\Pi'\rangle=\sum_{i=1}^{l'}\sum_{w\in\lambda^{-1}(W^*(\Pi_i'))\cap\hat{W}^+}\operatorname{sgn}\lambda(w)\cdot w\langle\Pi_i'\rangle$$

ここに Π_i' は $\Pi'=\{\alpha_1',\cdots,\alpha_{l'}'\}$ に対して

$$\Pi_i'=\{\alpha_1',\cdots,\alpha_{i-1}',\alpha_{i+1}',\cdots,\alpha_{l'}'\}$$

$\{B[\hat{W}],\partial\}$ は 非輪状 である。従て $B[\hat{W}]$ は $\hat{W}$ の自由溶解を与える。

Π_1,Π_2 を Π のふたつの部分図形とし，W_1,W_2 を対応する W のふたつの部分群とする。Cartan分解を各々 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{n}_1^+\oplus\mathfrak{n}_1^-=\mathfrak{g}_2\oplus\mathfrak{n}_2^+\oplus\mathfrak{n}_2^-$ とおく。

$${}^1W^2=\left\{\sigma\in W\;\middle|\;\begin{array}{l}(-\sigma\Delta^+)\cap\Delta^+\subset\Delta^+(\mathfrak{n}_1)\\(-\sigma\Delta^+)\cap\Delta^+\subset\Delta^+(\mathfrak{n}_2)\end{array}\right\}$$

とおくと $${}^1W^2\cong W_1\backslash W/W_2$$

$$L(\tau_1\sigma\tau_2)\left\{\begin{array}{l}>L(\sigma\tau_2)>\\>L(\tau_1\sigma)>\end{array}\right\}L(\sigma)$$

$\tau_1\in W_1,\ \tau_2\in W_2,\ \sigma\in{}^1W^2$; ${}^1W^2=W(\Pi_1,\Pi_2)$

と記す。 $\langle\Pi'\rangle$ ，$1\leq\mathrm{rk}\,\Pi'\leq l$ で生成される自由結合環を A とおくとき

rk 1 の Π' を $\langle\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\alpha_l\rangle$ として $\langle\alpha_1\rangle,\cdots,\langle\alpha_l\rangle$

で生成される自由群を F とおくと

$$0 \to L \to \mathbb{Z}[F] \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[\hat{W}] \to 0$$

なる完全列があり L は $\mathbb{Z}[\hat{W}]$ を決めるイデアルである。

$\mathcal{A}$ に次の境界作用素 δ を導入して

$|\pi'| = l'$ にて

$$\delta\langle \pi' \rangle = \sum_{|J| = |\pi'|-1} \sum_{\substack{\mu(u_1) \in \lambda^{-1}({}^{J}W') \cap \hat{W}'^{+} \\ \mu(u_2) \in \lambda^{-1}(W'^{J}) \cap \hat{W}'^{+}}} \operatorname{sgn} \lambda \circ \mu(u_1) \cdot u_1 \cdot \langle \pi'_J \rangle \cdot u_2 +$$

$$+ \sum_{|J_1|-1+|J_2|-1 = l'-2} \sum_{\substack{\mu(u_1) \in \lambda^{-1}({}^{J_1}W') \cap \hat{W}'^{+} \\ \mu(u_2) \in \lambda^{-1}({}^{J_1}W'^{J_2}) \cap \hat{W}'^{+} \\ \mu(u_3) \in \lambda^{-1}({}^{J_2}W') \cap \hat{W}'^{+} \\ u_i \in F}} \operatorname{sgn} \lambda \circ \mu(u_1 u_2) \cdot (-1)^{|J_1|-1} u_1 \langle \pi'_{J_1} \rangle u_2 \langle \pi'_{J_2} \rangle u_3$$

$\mathcal{A}$ は $H_p(\mathcal{A}) \cong 0$, $H_0(\mathcal{A}) \cong \mathbb{Z}[G]$ をみたすかどうかである。これは閉道空間の抽象から得られるものであるが証明はまだわからない。

特に A_2 の構成について云えば次のような単純だがむずかしそうな問題を考えることに帰する。

W^+の任意の元 σ は

$$\sigma = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_3}\cdots\ \sigma_{i_\nu} \quad \text{(簡約表示)}$$

と書かれるがこの書き方は一意ではない。そこで別の方法で

$$\sigma = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\sigma_{j_3}\cdots\ \sigma_{j_\nu}$$

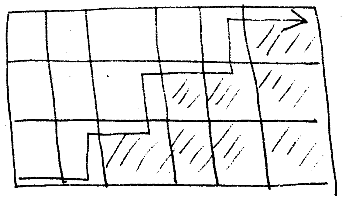
と書かれた時 $\{i_1 i_2 \cdots i_\nu\}$ から $\{j_1 j_2 \cdots j_\nu\}$

へ、操作 $\sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j \longrightarrow \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$ のみを何度も繰り返してしかも途中すべて簡約表示のまま最短に変形しうる仕方をすべて数え上げる事。

群 G が 2 個の生成元 σ_1, σ_2 で生成される自由アーベル群の場合 基本関係式 $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ を使って G の任意の元 σ を σ のひとつの簡約表示 $\sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\cdots\sigma_{i_\nu}$ からもうひとつの $\sigma_{j_1}\sigma_{j_2}\cdots\sigma_{j_\nu}$ へ変形する方法の数は A_2 の構成と本質的に同値でこれが

対称群の既約表現の次元によって与えられることが 村瀬氏(東大)によって注意された.

一般にトーラス



を図のように直方体分割した場合に自由双対棒構成 $A_2, A_3, \cdots$ の具体的な構成については $A_3, A_4, \cdots$ については皆目見当がつかない.
→高次元Young図形?

5. 我々の自由双対棒構成

は K.T. Chen 氏 [3] の簡約棒構成の双対概念であり 従って 空間の閉道空間のホモロジーを反映していることは明らかであるが 空間が非単連結のときは実際にそうなっているかどうかは知られていない (D.Sullivan [8] 参照). 2. で述べた事は $K(\Pi,1)$ のときは その事を保証するかに見える. 特に空間 X がモデュライの空間である場合 いろいろな実例で知られているように X

が $K(\pi,1)$ になっているように思われる．とすれば
$K(\pi,1)$ 性をこの　自由双対棒構成に
よって記述する方法を微分型式を道具
にて考えられないかという問題が生ずる．
今 D を $\mathbb{C}^n$ の原点を含む重みつき斉次多項
式の零点で定義される超曲面とし $X=\mathbb{C}^n-D$
とおく．$\Omega^{\bullet}(w\text{-}\log\langle D\rangle)$ を Saito の意味での D で
log 極の　有理型式のつくる微分
環とする．

［予想］$X=\mathbb{C}^n-D$ が有理的に $K(\pi,1)$
（斉藤(恭)［9］）
である $\Longleftrightarrow$ $\Omega^1(w\text{-}\log\langle D\rangle)$ は $\mathcal{O}$ で自由；
今 $\Omega^1(w\text{-}\log\langle D\rangle)$ が自由として その基底を
$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_\mu$ とおく．このとき

$$d\varphi_i = \frac{1}{2}\sum a_{i}^{jk}\,\varphi_j \wedge \varphi_k$$

$(a_i^{jk} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$　（構造方程式）

X_i $(1 \leqq i \leqq \mu)$ を $\mathfrak{gl}(\infty)$-値 正則関数として 方程式（積分可能条件）

$$d\left(\sum \varphi_i X_i\right) + \left(\sum \varphi_i X_i\right) \wedge \left(\sum \varphi_j X_j\right) = 0$$

を基本関係とする Lie 環を $\mathfrak{g}$ としてこれをホロノミー Lie 環と呼んでおく。このとき

$$\nabla : \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^{\cdot}(w\text{-}\log\langle D\rangle) \to \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^{\cdot}(w\text{-}\log\langle D\rangle)$$

$$\omega \longrightarrow d\omega + \varphi \wedge \omega$$

$$\left(\varphi = \sum \varphi_i X_i\right)$$

により $(\mathcal{E}(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^{\cdot}(w\text{-}\log\langle D\rangle), \nabla)$ は複体の構造を持つ。我々の予想は次の通り。

［予想］ X が有理 $K(\pi, 1)$ ならば $(\mathcal{E}(\mathfrak{g}) \otimes \Omega^{\cdot}(w\text{-}\log\langle D\rangle), \nabla)$ は非輪状であり逆も成り立つ。☆

文献 [1] P.A. Smith The complex of a group relative to a set of generators, Ann. of Math. 54, 371-424 (1951),

[2] D.M. Kan Abstract homotopy III, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1956, 411,

[3] K.T. Chen Reduced bar construction on de Rham complexes, A collection of Papers in Honor of S. Eilenberg, Acad. Press, 1976, 19-32.

[4] K. Aomoto On the acyclicity of free cobar constructions, I, II, Proc. Japan Acad. Vol. 53 (1977), 35-36, 78-80,

[5] E. Brieskorn and K. Saito Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen, Invent. Math. 17, 245-271 (1972),

[6] P. Deligne Les immeubles des groupes de tresse généralisés, Invent. Math. 17, 273-302 (1972),

[7] 中村得之 数理研講究録 (1976)

[8] D. Sullivan Differential forms and the topology of manifolds, Proc. of the Conference on manifolds, Tokyo, 1973,

[9] 斉藤・関口・矢野 to appear ;

☆この非輪状は代数多様体の Lefschetz の定理の類似のもので可換環において藤田隆夫氏の基本関係式の系列を与える理論の類似

を追ってみることが面白いかもしれない．これについては

[10] 藤田隆夫　Defining equations for certain types of polarized varieties, A collection of papers dedicated to K. Kodaira, 1977, 165–173;